Výpočet útlmu žiarenia na nabitej sfére

Mikrovlnový útlm súvisí s dvoma javmi:

- Rozptylom (scattering) žiarenia do iného smeru
- Absorpciou žiarenia v časticiach aerosólu

Celkovú stratu energie zo zväzku charakterizuje súčet oboch príspevkov, ktorý sa nazýva **extinkcia** – vzťah (3).

Pri výpočte účinnosti extinkcie budeme vychádzať z Mieho teórie rozptylu (Mie, 1908), ktorá dokáže analyticky riešiť rozptyl na jednej sfére alebo jednom nekonečnom valci s daným polomerom *r* a komplexným indexom lomu

$$m = m' - im'' \qquad (1)$$

v prostredí s čisto reálnou hodnotou indexu lomu (napr. vzduch). Je treba poznamenať, že pri štúdiu rozptylu elektromagnetického žiarenia je vhodnejšie namiesto polomeru častice uvádzať tzv. veľkostný parameter *x* daný vzťahom:

$$x = 2\pi r/\lambda, \qquad (2)$$

kde λ je vlnová dĺžka dopadajúceho žiarenia. Riešenie rozptylu žiarenia je založené na rozklade intenzity dopadajúceho a rozptýleného žiarenia do radu sférických Besselových funkcií a Legendrových polynómov, pre ktoré je možné nájsť riešenie vyhovujúce okrajovým podmienkam. Nás budú v tomto prípade zaujímať bezrozmerné koeficienty účinnosti pre extinkciu Q_{ext}, rozptyl Q_{sca} a absorbciu Q_{abs} počítané pomocou Mieho teórie.
Vo všeobecnosti platí, že koeficient účinnosti pre extinkciu je súčtom koeficientov pre roptyl a absorbciu:

$$Q_{ext} = Q_{sca} + Q_{abs}\,, \qquad (3)$$

pričom jednotlivé koeficienty môžeme vyjadriť ako nekonečné rady dané vzťahmi:

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)Re(a_n + b_n) \quad , \qquad (4)$$

$$Q_{sca} = \frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad , \qquad (5)$$

pričom *x* je spomínaný veľkostný parameter (2) a *n* je celé číslo od 1 po hodnotu, po ktorú chceme rad sčítavať. Podľa práce Wiscombe (1980) nám pre presný výsledok (teda na konvergenciu výrazu) postačuje spočítať maximálne $n_{max} = x + 4x^{\frac{1}{3}} + 2$ členov. Koeficienty a_n a b_n sú odvodené z okrajových podmienok a sú dané vzťahmi:

$$a_n = \frac{\psi_n(x)\,\psi_n'(mx) - m\psi_n'(x)\psi_n(mx)}{\xi_n(x)\,\psi_n'(mx) - m\xi_n'(x)\psi_n(mx)}\,,$$

$$b_n = \frac{m\psi_n(x)\,\psi_n'(mx) - \psi_n'(x)\psi_n(mx)}{m\xi_n(x)\,\psi_n'(mx) - \xi_n'(x)\psi_n(mx)}\,, \qquad (6)$$

kde sú jednotlivé veličiny ψ_n, ξ_n závislé na x (veľkostný parameter) alebo mx (veľkostný parameter násobený indexom lomu častice) vyjadrené nasledovne:

$$\psi_n(x) = x\, j_n(x),\ \psi_n(mx) = mx\, j_n(mx)\ ,$$
$$\xi_n(x) = x\, h_n^1(x), \xi_n(mx) = mx\, h_n^1(mx)\ , \tag{7}$$

pričom $j_n(x)$ sú sférické Besselove funkcie prvého druhu dané rovnicami

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x},$$
$$y_n(x) = -(-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x}\quad , \tag{8}$$

z ktorých je možné vypočítať tzv. sférické Hankelove funkcie prvého druhu $h_n^{(1)}(x)$:

$$h_n^1(x) = j_n(x) + i y_n(x)\ . \tag{9}$$

Argument x vo vzťahoch (8) - (9) nadobúda v rovniciach (6) - (7) hodnoty x alebo mx. Derivácie funkcii ψ_n', ξ_n' z rovníc (6) podľa premenných x a mx sa vypočítajú podľa vzťahov:

$$\xi_n'(x) = \xi_{n-1}(x) - \frac{n}{x}\xi_n(x),$$
$$\psi_n'(x) = \psi_{n-1}(x) - \frac{n}{x}\psi_n(x),$$
$$\xi_n'(mx) = \xi_{n-1}(mx) - \frac{n}{mx}\xi_n(mx),$$
$$\psi_n'(mx) = \psi_{n-1}(mx) - \frac{n}{mx}\psi_n(mx)\ . \tag{10}$$

Táto schéma nám umožňuje vypočítať koeficient účinnosti extinkcie (4) pre ľubovoľnú nenabitú sférickú časticu s indexom lomu m a veľkostným parametrom x. Pre prípad nabitej častice je však potrebné upraviť Mieho teóriu rozptylu tak, aby zahŕňala dodatočný elektrický náboj, či už na povrchu sférických častíc v prípade vodivých objektov alebo náboj obsiahnutý v celom objeme v prípade dielektrík. V práci Bohren a Hunt (1977) bol popísaný výpočet rozptylu na nabitých vodivých sférach pomocou modifikovanej Mieho teórie, kde sa predpokladalo, že sa elektrický náboj nachádza v tenkej vrstve na hranici objektu, čo zmení hraničnú podmienku pre magnetickú intenzitu na povrchu sféry na priamo úmernú povrchovej vodivosti náboja σ_S. Výsledkom je, že koeficienty a_n a b_n z rovnice (6) prejdú na tvar

$$a_n = \frac{\mu_0^{-1}\psi_n(x)\,\psi_n'(mx) - m\mu_1^{-1}\psi_n'(x)\psi_n(mx) - i\omega k^{-1}\sigma_S\psi_n'(x)\psi_n'(mx)}{\mu_0^{-1}\xi_n(x)\,\psi_n'(mx) - m\mu_1^{-1}\xi_n'(x)\psi_n(mx) - i\omega k^{-1}\sigma_S\xi_n'(x)\psi_n'(mx)}\ ,$$

$$b_n = \frac{\mu_0^{-1}\psi_n'(x)\,\psi_n(mx) - m\mu_1^{-1}\psi_n(x)\psi_n'(mx) - i\omega k^{-1}\sigma_S\psi_n(x)\psi_n(mx)}{\mu_0^{-1}\xi_n'(x)\,\psi_n'(mx) - m\mu_1^{-1}\xi_n(x)\psi_n'(mx) - i\omega k^{-1}\sigma_S\xi_n(x)\psi_n(mx)}, \tag{11}$$

kde ω je uhlová frekvencia dopadajúcej vlny a $k = 2\pi/\lambda$, μ_0, μ_1 sú permeability častice a prostredia a ostatné veličiny sú známe z predošlej schémy. Ďalším zovšeobecnením modelu je predpoklad, že idealizovaný povrchový náboj je superpozíciou (súčtom) nenulového stacionárneho náboja a časovo premenlivého náboja. Za ďalšieho predpokladu, že častice sú nemagnetické, a teda $\mu_1 = \mu_0$, dostávame následne pre koeficienty a_n a b_n tvar odvodený v práci Klačka a Kocifaj (2007):

$$a_n = \frac{\left[\frac{\left(1+\frac{ng}{x}\right)D_n(mx)}{m} + \frac{n}{x}\right]\psi_n(x) - \left[1 + \frac{gD_n(mx)}{m}\right]\psi_{n-1}(x)}{\left[\frac{\left(1+\frac{ng}{x}\right)D_n(mx)}{m} + \frac{n}{x}\right]\xi_n(x) - \left[1 + \frac{gD_n(mx)}{m}\right]\xi_{n-1}(x)},$$

$$b_n = \frac{\left[mD_n(mx) + \left(\frac{n}{x}\right)\left(\frac{1-gx}{n}\right)\right]\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)}{\left[mD_n(mx) + \left(\frac{n}{x}\right)\left(\frac{1-gx}{n}\right)\right]\xi_n(x) - \xi_{n-1}(x)}, \tag{12}$$

pričom sme zaviedli označenia

$$D_n(mx) = \frac{\psi_n'(mx)}{\psi_n(mx)} = \frac{\psi_{n-1}(mx)}{\psi\,(mx)} - \frac{n}{mx}, \tag{13}$$

$$g = i\omega k^{-1}\mu_0\sigma_s \approx \frac{x}{2}\frac{\omega_S^2}{\omega^2 + \gamma_S^2}\left(-1 + i\frac{\gamma_S}{\omega}\right). \tag{14}$$

Člen ω_S je plošná plazmová frekvencia daná elektrostatickým potenciálom na povrchu sféry Φ s polomerom R, elementárnym nábojom (e = 1.602 x 10^{-19} C) a hmotnosťou elektrónu (m_e = 9,109 x 10^{-31} kg) podľa vzťahu:

$$\omega_S^2 = 2\frac{e}{m_e}\frac{\Phi}{R^2} \quad . \tag{15}$$

Koeficient γ_S je nepriamo úmerný relaxačnému času elektrónov a je vyjadrený pomocou Boltzmannovej konštanty (k_B = 1.38 x 10^{-23} J.K^{-1}), modifikovanej Planckovej konštanty ($\hbar = h/2\pi$ = 1.0546 x 10^{-34} J) a termodynamickej teploty nasledovne:

$$\gamma_S = coeff.\frac{k_B T}{\hbar}, \; . \tag{16}$$

kde *coeff* je koeficient úmernosti blízky hodnote 1 (najčastejšie sa používajú hodnoty z intervalu 0.1 až 10).

Dosadením rovníc (12) do rovnice (4) dostávame koeficient účinnosti pre extinkciu pre nabitú sféru. Z uvedených rovníc pre nabité častice sa dá jednoduchým predpokladom o nulovom povrchovom náboji, a teda nulovej povrchovej vodivosti $\sigma_S = 0$ (zo vzťahu (14) plynie $g = 0$) dostať k pôvodným rovniciam (6) pre koeficienty a_n, b_n pri klasickom Mieho rozptyle.

Celkový postup pri výpočte koeficientu extinkcie na jednej sfére je teda takýto:

1. Zvolíme **frekvenciu** žiarenia a vypočítame jeho vlnovú dĺžku
2. Zvolíme **polomer častice** a vzťahom (2) určíme veľkostný koeficient x
3. Zvolíme reálnu a imaginárnu časť **indexu lomu** (1)
4. Zvolíme **potenciál** a vzťahom (15) určíme plazmovú frekvenciu
5. Zvolíme **teplotu** a **koeficient** úmernosti a vzťahom (16) určíme tlmenie pohybu elektrónov
6. Vzťahmi (12) vypočítame koeficienty a_n a b_n, vzťahom (4) určíme **koeficient extinkcie častice**

Celkový koeficient útlmu závisí aj od **objemovej koncentrácie častíc** n_v (jednotka m^{-3}) a **prierezu častice**:

$$b = 4\pi r^2 n_v Q_{ext} \tag{17}$$

kde r je polomer častíc a b (rozmer m^{-1}) je koeficient útlmu v Lambertovom zákone pre pokles energie žiarenia so vzdialenosťou z:

$$I(z) = I(0)e^{-bz} \tag{18}$$

Útlm mikrovĺn v jednotkách dB/km určíme vzťahom

$$A\,[\mathrm{dB/km}] = -10\log\frac{I(1000\mathrm{m})}{I(0\mathrm{m})} = -10\log e^{-1000b} = 10\,.\log e\,.\,1000\,.\,b = 4343b \tag{19}$$